数　　　学

注　意

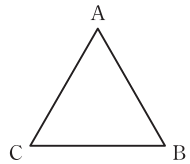
1. 問題は全部で５題あり，冊子は計算用の余白も合わせて 12 ページである．
2. 解答用紙に氏名を忘れずに記入すること．
3. 解答は解答用紙の指定された欄に記入すること．指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない．
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはならない．
5. 解答用紙は必ず提出すること．問題冊子は持ち帰ってよい．

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子を開いてはならない．

〔計 算 用 余 白〕

〔計 算 用 余 白〕

I 次のような1辺の長さが1の正三角形ABCがある.



次の操作に従って正三角形ABCの辺上を動く点Pがある.

操作：青球2個，赤球2個，白球1個が入った袋から球を1個取り出し，色を調べてからもとに戻す．取り出した球が青球ならば点Pを時計回りに1だけ移動させ，赤球ならば点Pを反時計回りに1だけ移動させる．また，取り出した球が白球ならば点Pを頂点Aに移動させる．ただし，点Pが頂点Aにあるときに取り出した球が白球ならば点Pを動かさない．

最初に点Pが頂点Aにあるとし，上の操作をn回くり返した後に点Pが頂点Aにある確率をp_nとする.

(1) $p_1 = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，$p_2 = \dfrac{\boxed{3}\boxed{4}}{\boxed{5}\boxed{6}}$ である.

(2) 数列$\{p_n\}$は漸化式

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{7}\boxed{8}}{\boxed{9}} p_n + \frac{\boxed{10}}{\boxed{11}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす.

(3) 数列$\{p_n\}$の一般項は

$$p_n = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}} \left(\frac{\boxed{14}\boxed{15}}{\boxed{16}} \right)^n + \frac{\boxed{17}}{\boxed{18}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である.

〔計 算 用 余 白〕

Ⅱ a，b を実数の定数とする．ただし，$a \neq 0$ とする．

x についての３次方程式

$$ax^3-(3a-12)x^2+(2a-11)x+b=0 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

が１つの実数解と２つの虚数解をもつとする．実数解は１であるとする．

⑴ $b=\boxed{19}\boxed{20}$ であり，方程式(∗)は

$$(x-1)\left\{ax^2-\left(\boxed{21}\,a-\boxed{22}\boxed{23}\right)x+\boxed{24}\right\}=0$$

と表せる．

⑵ a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{25}<a<\boxed{26}$$

である．

⑶ 方程式(∗)の２つの虚数解の実部が負であり，かつ a が整数ならば，$a=\boxed{27}$ である．このとき，方程式(∗)の２つの虚数解は

$$\frac{\boxed{28}\boxed{29}}{\boxed{30}}\pm\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}i$$

である．ただし，i は虚数単位とする．

〔計 算 用 余 白〕

III xy 平面上の点 A$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円のうち，y 座標が正の部分を C_1 とする．C_1 と放物線 $C_2 : y = x^2 + \frac{5}{4}$ の 2 つの交点のうち，x 座標が正の点を P，x 座標が負の点を Q とする．

(1) 点 P の座標は $\left(\frac{\sqrt{\boxed{33}}}{\boxed{34}},\ \boxed{35}\right)$ である．

(2) $\angle \mathrm{PAQ} = \frac{\boxed{36}}{\boxed{37}}\pi$ である．

(3) 線分 PQ と C_2 で囲まれた図形の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}$ である．

また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{40}}{\boxed{41}}\pi - \frac{\sqrt{\boxed{42}}}{\boxed{43}}$ である．

〔計 算 用 余 白〕

Ⅳ 点Oを原点とする xyz 空間内に，点A$(8, 0, 0)$と2点B，Cがある．点Bは xy 平面上の $x > 0$，$y > 0$ の部分にあり，点Cの z 座標は正であるとする．さらに，

$$\mathrm{OB} = 5\sqrt{2},\quad \mathrm{AB} = 7\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{COA} = \frac{\pi}{3},\quad \angle\mathrm{COB} = \frac{\pi}{4}$$

であるとし，点Cから xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点をHとする．

(1) 点Bの座標は $\left(\boxed{44}, \boxed{45}, 0\right)$ である．

(2) 点Hの x 座標を a とするとき，点Hの y 座標は $\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}a$ である．

(3) 点Hが2点A，Bを通る直線上にあるのは，$\mathrm{OC} = \boxed{48}$ のときである．

このとき，点Cの座標は $\left(\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}, \dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}, \dfrac{\sqrt{\boxed{53}\boxed{54}}}{\boxed{55}}\right)$ である．

〔計 算 用 余 白〕

$\boxed{\mathrm{V}}$ 関数

$$f(x) = \log \frac{\sqrt{3}\,x + 1}{x^2 + 1} \qquad \left(x > -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

と xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える.

(1) C と x 軸との共有点の x 座標は，$x = \boxed{56}$, $\sqrt{\boxed{57}}$ である.

(2) $f(x)$ は $x = \dfrac{\sqrt{\boxed{58}}}{\boxed{59}}$ で極大値

$$\log a \qquad \left(a = \frac{\boxed{60}}{\boxed{61}}\right)$$

をとる.

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積は

$$\sqrt{\boxed{62}} + \frac{\boxed{63}\sqrt{\boxed{64}}}{\boxed{65}} \log \boxed{66} - \frac{\boxed{67}}{\boxed{68}}\pi$$

である.

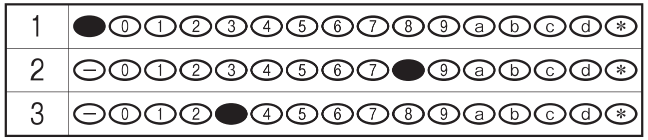
〔計 算 用 余 白〕

マーク・シート記入上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークすること．

2　問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(0～9)又は文字(a～d)が入る．1，2，3，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の1，2，3，… で示された解答欄にマークして答えよ．

例　$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ に －83 と答えたいとき



なお，同一の問題文中に $\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{3}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{3}$ のように細字で表記する．

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけない．

例えば，$\dfrac{\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{6}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えよ．

また，それ以上約分できない形で答えること．

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけない．

4　根号あるいは対数を含む形で解答する場合は，根号の中や真数に現れる自然数が最小となる形で答えよ．

例えば，$\boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない．また，$\boxed{9}\log_2\boxed{10}$ に $6\log_2 3$ と答えるところを，$3\log_2 9$ のように答えてはいけない．

5　分数形で根号を含む形で解答する場合，$\dfrac{\boxed{11}+\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけない．